Лекция 7. Шеннон – Котельников теоремасы. Кайта тудырушы ядросы бар Гильберт кеңістіктері.

$[a,b]$ кесіндінің мінездеуші функциясын карастырайық:

$$\chi[a,b]=\begin{cases}1, x\in[a,b]\\0, x\notin[a,b].\end{cases}$$

Бұл функцияның Фурье түрлендіруін есептейік:

$$\hat{\chi}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{i\xi x}dx=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\xi x}-e^{i\xi x}}{i\xi}=-\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\xi x)}{\xi x}\to 0, \text{ при } \quad |\xi|\to\infty.$$

Сонымен, тасымалдаушысы компакт функциялардың Фурье этүрлендіруін шексіздікте өте жай өшетін функция болады. Керісінше, Фурье түрлендіруі компакт болатын функцияларды спектрі шектелген функциялар деп атайды. Олардың $\operatorname{supp}\left(\hat{f}(\xi)\right)\subset[-\Omega,+\Omega], 0<\Omega<\infty.$

Котельников-Шеннон теоремасы:

Егер $f(x)$ – спектрі шектелген функция болса, то онда ол өзінің π/Ω ара қашықпен берілген дискретті мәндерімен толық анықталады.

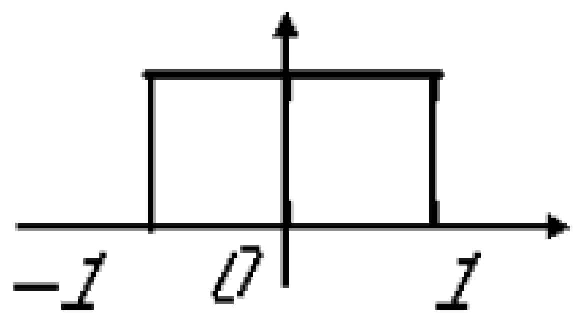
$\mathrm{Sinc}(x)=\sin(x)/x \subset L_2(R)$ функцияны аныктайык.

Бұл функциянын спектрі:.

:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\sin x}{x}e^{i\xi x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\sin x\cos\xi x}{x}dx=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left[\int_{-N}^{N}\frac{\sin(1+\xi)x}{x}dx+\int_{-N}^{N}\frac{\sin x(\xi-1)}{x}dx\right]=$$

Бұл Эйлер интегралына әкеледі: $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{\pi}{2}sign(a)$, жалғастыра отырып:



$$\frac{\pi}{2}\left(sign(1+\xi)+sign(1-s)\right)=\begin{cases}\pi, |\xi|<1\\ 0, |\xi|\geq 1\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\Omega}f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right)\exp\left(\frac{i\xi\pi n}{\Omega}\right)\exp(i\xi x)d\xi=$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right)\frac{e^{i\Omega(x-n\pi/\Omega)}-e^{-i\Omega(x-n\pi/\Omega)}}{2i(x-n\pi/\Omega)}=\sum_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right)\frac{\sin(\Omega x-\pi n)}{(\Omega x-\pi n)}$$

Бұл формула Шеннон – Котельников формуласы деп атайды. Ω/π қатынасты Найквист жиілігі деп атайды.

Қайта тудырушы ядросы бар Гильбертов кеңістігі

f(x) спектрі шектелген функция болсын.

Онда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\exp(i\xi x)d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\hat{f}(\xi)\exp(i\xi x)d\xi=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\exp(-i\xi y)dy\exp(i\xi x)d\xi=$$

интегралдау ретін ауыстырсақ, онда:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{i\xi(x-y)}d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{\sin\Omega(x-y)}{\Omega(x-y)}dy=f*Sinc(\Omega x)$$

Түйін: спектрі шектелген функция мәндері келесі скаляр көбейтінді арқылы есептеледі:

$f(x)=\langle f,e_x\rangle$, где $e_x(y)=\sin\Omega(x-y)/\Omega(x-y)$,

немесе, үздіксіз сызықты функционал арқылы, себебі, $f\to f(x)$ сәйкестендіру үздіксіз..

Бұл функцияларды тудырушы ядросы бар гильберт кеңістігі деп атайды.

Анықтама. Егер $\exists K(x,y): f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y) f(y) dy$ в $L_2(R)$,

онда бұл функциялар жиыны K(x,y) тудырушы ядросы бар гильберт кеңістігі деп атайды .